Jan Przybyłowski, *Logika z ogólną metodologią nauk. Podręcznik dla humanistów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2003

NOWE ODKRYCIA W KLASYCZNEJ LOGICE?

W omawianym podręczniku znajdują się twierdzenia, które gdyby były prawdziwe przyniosłyby autorowi zasłużony rozgłos. Na trzydziestu stronach przedstawiany jest system założeniowy rachunku zdań. Po określeniu 14 reguł wnioskowania autor wprowadza 4 reguły tworzenia dowodów założeniowych (dowód wprost i nie wprost, zwykły dowód wprost i nie wprost). Po zakończeniu ich prezentacji autor pisze: *Przedstawione do tej pory sposoby dowodzenia są najbardziej podstawowe i najczęściej stosowane. Istnieją jednak pewne tautologie, które można udowodnić dopiero przy użyciu bardziej skomplikowanych (a wobec tego nieco trudniejszych) dowodów* [*P*, s. 93; Przez „*P”* oznaczam ww. podręcznik, a przez „**SZP**" system założeniowy rachunku zdań w *P*].

Jest to rewelacyjne twierdzenie, jeśli się zważy, że:

1) J. Słupecki i L. Borkowski w kompetentnym wykładzie systemu założeniowego [J. Słupecki, L. Borkowski *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa, 1963. Dalej tę pracę będę oznaczał jako „*SB*" a system założeniowy rachunku zdań w niej jako „**SZSB**"] przyjmują regułę tworzenia dowodu założeniowego nie wprost jako jedyną regułę pierwotną tworzenia dowodu. Tej regule w **SZP** odpowiada reguła tworzenia dowodu założeniowego nie wprost, łącznie z regułą tworzenia zwykłego dowodu nie wprost.
2) Wszystkie pierwotne reguły wnioskowania w **SZSB** znajdują się wśród 14 reguł w **SZP**.

3) W *SB* autorzy wykazują, że **SZSB** jest systemem pełnym [Por. *SB*, ss. 64-66]. Znaczy to, że każda tautologia rachunku zdań daje się udowodnić w ich systemie założeniowym.

Z 1)–3) wynika, że, wbrew temu co pisze w wyżej przytoczonym cytacie J. Przybyłowski, nie istnieją tautologie w **SZP**, które nie dają się udowodnić dowodem wprost lub nie wprost.

Autor chce uzasadnić swoją tezę przez wskazanie konkretnego przykładu tautologii, której nie można udowodnić ani wprost, ani nie wprost. Takim właśnie przykładem jest, wg niego, tautologia: (1) $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$. Chce on przekonać czytelnika, że w przypadku, gdy po wypisaniu założeń formuły, nie można zastosować żadnej reguły wnioskowania, jesteśmy uprawnieni do konkluzji, że nie istnieje stosowny (wprost lub nie wprost) dowód danej formuły [Por. *P*, s. 94].

Wyprowadzając taki wniosek autor nie uwzględnił wprowadzonych przez siebie definicji. Przecież w określeniach dowodów wprost jak i nie wprost znajduje się punkt, który mówi, że *Wolno* [...] *do dowodu dołączyć prawa wcześniej udowodnione* [*P*, s. 86. Por. też ss. 89, 91, 93].

Biorąc ten punkt pod uwagę zaiste niewiele trzeba inwencji, żeby znaleźć dla (1) dowód wprost. Wystarczy najpierw udowodnić dwa twierdzenia: (1a) $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$ i (1b) $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow (q \rightarrow r)$, których proste czterowierszowe dowody uzyskujemy przez zastosowanie reguły dołączania alternatywy (DA) i reguły odrywania (RO), a potem (1a) i (1b) dołączyć do dowodu tautologii (1) i zastosować RO i regułę dołączania koniunkcji (DK), aby zakończyć dowód. A zatem fałszywa jest zarówno ww. teza autora, jak i przesłanka, na której się ona opiera.

Błędy dotychczasowe pociągają za sobą dalsze. Autor bowiem, wychodząc z fałszywego założenia, że istnieją tautologie, które nie dają się udowodnić ani wprost ani nie wprost dochodzi do wniosku, że muszą istnieć „mocniejsze" sposoby dowodzenia i znajduje je w postaci reguły tworzenia dowodów pobocznych i rozgałęzionych [Por. *P*, ss. 96-97]. Reguła tworzenia dowodów pobocznych to w **SZSB** reguła dołączania implikacji do dowodu, łącznie z regułą dołączania do dowodu wyrażenia sprzecznego z dodatkowym założeniem [Por. *SB*, ss. 32-33, 35, 45]. Te dwie ostatnie reguły, podobnie jak reguła tworzenia dowodów rozgałęzionych, to w **SZSB** reguły wtórne ze względu na regułę tworzenia dowodu nie wprost. Oznacza to, że są one również wtórne w **SZP** ze względu na reguły: tworzenia założeniowego dowodu nie wprost i zwykłego dowodu nie wprost i stąd nieprawdą jest, że istnieją tautologie, które można udowodnić przy ich pomocy, a nie można udowodnić nie wprost.

Nie jest również prawdą, że zastosowanie tych reguł prowadzi *do bardziej skomplikowanych (a wobec tego nieco trudniejszych dowodów).* Wprost przeciwnie – dzięki ich stosowaniu dowody są prostsze, krótsze i łatwiejsze. Pozwalają one bowiem na włączenie do dowodu głównego dowodu tych twierdzeń, które są nam potrzebne i które bez tych reguł musielibyśmy wcześniej (lub „na boku") udowodnić. Np. już dowód prostego twierdzenia (1) dzięki zastosowaniu reguły tworzenia dowodów pobocznych jest krótszy o 4 wiersze w porównaniu z wyżej zastosowanym sposobem dowodzenia tego samego twierdzenia. Ich zaletą jest zatem ułatwianie dowodów, a nie, jak błędnie sądzi J. Przybyłowski, że pozwalają dowieść tego, czego bez nich nie da się udowodnić.

Błędnie pojmuje również autor relację między dowodem wprost i nie wprost w prezentowanym przez siebie systemie. Na str. 90 czytamy: *Otóż łatwo zauważyć, że cokolwiek da się udowodnić wprost, da się również udowodnić nie wprost. Ale nie na odwrót. Jak to wykazaliśmy na przykładzie prawa dodawania poprzedników implikacji, istnieją takie tautologie, których nie da się* [...] *udowodnić wprost, a można je udowodnić nie wprost.*

Ta teza jest prawdziwa odnośnie do **SZSB** ale nie **SZP**. Jest tak dlatego, że autor rozszerzył zbiór reguł wnioskowania, dodając do 7 reguł w SZSB jeszcze 7 dalszych a wśród nich znalazła się reguła *modus tollens* (MT) oraz reguły dołączania i opuszczania negacji (DN i ON). I właśnie dzięki wprowadzeniu tych trzech reguł autor tak dalece „wzmocnił" dowód wprost, że reguła dowodu nie wprost stała się regułą wtórną ze względu na regułę dowodu wprost. Znaczy to, że w **SZP** wszystko, co daje się udowodnić nie wprost daje się również udowodnić wprost.

Nieprawdą jest zatem to, co głosi autor, że w jego systemie są tautologie, które dają się udowodnić nie wprost a nie dają się udowodnić wprost; a co za tym idzie nieprawdą jest, że prawa dodawania poprzedników implikacji: (2) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$ nie można udowodnić dowodem założeniowym wprost.

Aby dowieść wprost (2), dowodzimy najpierw wprost następujące tautologie:

(2a) $(p \wedge q) \rightarrow p$

(2b) $(r \wedge \sim r) \rightarrow \sim[(p \wedge q) \rightarrow p]$

(2c) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim((p \wedge q) \rightarrow p)]$

(2a) dowodzimy stosując regułę OK.

Dowód (2b) polega na zastosowaniu reguły DA i reguły opuszczania alternatywy (OA).

Dowód (2c) rozpoczynamy od zastosowaniu kolejno reguł: MT, OA, RO do wypisanych założeń, co daje nam w dowodzie dwa wiersze sprzeczne: r i $\sim r$. Po zastosowaniu DK i dołączeniu do dowodu (2b) stosujemy RO i otrzymujemy $\sim((p \wedge q) \rightarrow p)$, co kończy dowód.

Przystępując do dowodu (2) wypisujemy najpierw założenia a potem dołączamy do dowodu (1) i (2) i stosując kolejno RO, DN, MT i ON otrzymujemy wyrażenie r, co kończy dowód.

Ten sposób postępowania można uogólnić, dowodząc tezy (M1), że *w każdym przypadku, jeżeli dla formuły o postaci: (3)* $W_1 \rightarrow (W_2 \rightarrow (W_3 \rightarrow .... \rightarrow (W_n \rightarrow W)..))$ *istnieje dowód nie wprost, to istnieje również dla niej dowód wprost.*

Najpierw wykażemy, że (M2*) jeżeli formułę o postaci (3), można udowodnić nie wprost, to wprost można udowodnić formułę o postaci: (4)* $W_1 \rightarrow (W_2 \rightarrow (W_3 \rightarrow ..... \rightarrow (W_n \rightarrow (\sim W \rightarrow \sim T))..)$*, gdzie T jest jakimkolwiek wcześniej udowodnionym twierdzeniem /np.* $(p \wedge q) \rightarrow p$*/.* Jest jasne, że założenia formuły o postaci (4) są identyczne z założeniami dowodu nie wprost formuły o postaci (3). A zatem, jeżeli formułę o postaci (3) można udowodnić nie wprost, to znaczy, że i w dowodzie wprost formuły o postaci (4) można otrzymać również dwa wiersze sprzeczne. Po zastosowaniu do nich DK i dołączeniu do dowodu stosownej wersji twierdzenia (2b), a potem RO otrzymamy $\sim T$, co kończy dowód.

Rozpoczynając dowód tezy (M1) zakładamy, że istnieje dowód nie wprost twierdzenia o postaci (3). Zgodnie z (M2) twierdzeniem jest wtedy formuła o postaci (4), którą możemy dołączyć do dowodu wprost formuły o postaci (3). Dowód ten zaczynamy od wypisania wszystkich n założeń formuły o postaci (3). Po zastosowaniu n razy RO otrzymamy $\sim W \rightarrow \sim T$, a po dołączeniu do dowodu T jako twierdzenia wcześniej udowodnionego i po zastosowaniu reguł: DN, MT i ON otrzymamy w dowodzie W, co kończy dowód wprost rozważanej formuły.

Reasumując: fałszywa jest zarówno przesłanka, na której opiera się autor formułując cytowaną wyżej tezę, jak i sama ta teza, którą ta przesłanka miała uzasadnić.

Przedstawione dotychczas przykłady nie wyczerpują listy błędów omawianego podręcznika. Również w innych rozdziałach występują poważne uchybienia. Już dotychczas wymienione uzasadniają pytanie, jak to stało, że obarczona tyloma istotnymi błędami książka funkcjonowała przez 9 lat[1] (i funkcjonuje nadal) jako uniwersytecki podręcznik logiki. Czy nie jest to wynik zbyt liberalnych regulacji dotyczących wydawania podręczników?

Marian Dębogórski

[1] Wydanie z 2003 roku nie różni się od I wydania z roku 1995.